PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXII – ZESZYT 2 – 2015

EMIL PANEK[1]

ZAKRZYWIONA MAGISTRALA W NIESTACJONARNEJ GOSPODARCE GALE'A. CZĘŚĆ I

1. WSTĘP

W teorii magistral mimo upływu czasu do nielicznych należą prace poświęcone efektowi magistrali w niestacjonarnych gospodarkach typu Neumanna–Gale'a–Leontiefa[2]. Przykłady niestacjonarnej gospodarki typu Gale'a ze zmienną technologią przedstawiamy m.in. w artykułach Panek (2013, 2014a,b). Gospodarka na magistrali (produkcyjnej) osiąga w nich najwyższe tempo wzrostu, zachowując jednak stałą strukturę produkcji. Obrazem geometrycznym takiej magistrali jest półprosta w przestrzeni stanów gospodarki, nazywana promieniem von Neumanna.

W realnych gospodarkach struktura produkcji z czasem zmienia się, niekiedy dynamicznie, m.in. na skutek postępu technicznego, innowacji, wyczerpywania się zasobów surowcowych, zmian w popycie konsumpcyjnym etc. Uwzględniając ten fakt, w artykule prezentujemy ogólniejszą postać tzw. zakrzywionej magistrali, na której gospodarka nie tylko osiąga maksymalne tempo wzrostu, lecz zmienia także strukturę produkcji. Obrazem geometrycznym takiej magistrali jest wiązka krzywych (łamanych) w przestrzeni stanów gospodarki[3]. Najistotniejsza różnica między modelem gospodarki, którym zajmujemy się obecnie, a modelem przedstawionym w artykule Panek (2014) polega zmianie jednego założenia: zastąpieniu warunku **(G8)** w pracy z 2014 r. na warunek (obecnie) **(G9)**.

W punkcie 2 prezentujemy model oraz przytaczamy podstawowe definicje i założenia. W punkcie 3 dowodzimy „słabego" twierdzenia o zakrzywionej magistrali. W punkcie 4 pokazujemy, że efekt magistrali o którym mowa w punkcie 3 pozostaje w mocy, gdy kryterium maksymalizacji wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna) zastąpimy kryterium maksymalizacji społecznej funkcji użyteczności określonej na wektorach produkcji wytworzonej w okresie końcowym ustalonego horyzontu funkcjonowania gospodarki. Obowiązują oznaczenia stosowane we wspomnianym artykule z 2014 r.

---

[1] Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Katedra Ekonomii Matematycznej, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, Polska, e-mail: emil.panek@ue.poznan.pl.

[2] Por. bibliografię w artykule Panek (2011) oraz np. Khan, Piazza (2011, 2012).

[3] Na podobieństwo wielopasmowej autostrady w ruchu drogowym.

2. MODEL

Przez t oznaczamy (dyskretną) zmienną czasu przebiegającą zbiór $T = \{0,1,\ldots,t_1\}$, zwany horyzontem gospodarki; $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$ jest wektorem towarów zużywanych w okresie t (wektorem nakładów), $y(t) = (y_1(t),\ldots,y_n(t))$ jest wektorem towarów wytwarzanych w gospodarce w okresie t (wektorem produkcji). Jeżeli z nakładów $x(t)$ można wytworzyć produkcję $y(t)$, wtedy o parze $(x(t), y(t))$ mówimy, że opisuje (tworzy) dopuszczalny proces produkcji w okresie t. Przez $Z(t) \subset R_+^{2n}$ oznaczamy zbiór wszystkich technologicznie dopuszczalnych procesów produkcji w gospodarce w okresie t. Zapis $(x,y) \in Z(t)$ (lub $(x(t),y(t)) \in Z(t)$) oznacza, że w okresie t w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z nakładów x można wytworzyć produkcję y.

Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$ spełniają następujące warunki:

(G1) $\forall\, (x^1, y^1) \in Z(t)\ \ \forall (x^2, y^2) \in Z(t)\ \ \forall\, \alpha, \beta \geq 0\ \left((\alpha x^1 + \beta x^2, \alpha y^1 + \beta y^2) \in Z(t)\right)$.

(G2) $\forall (x, y) \in Z(t)\ (x = 0 \Rightarrow y = 0)$.

(G3) $\forall (x, y) \in Z(t)\ \forall\, x' \geqq x\ \forall\, 0 \leqq y' \leqq y\ \left((x', y') \in Z(t)\right)$.

(G4) Zbiory $Z(t)$ są domknięte w R^{2n}.

(G5) $Z(t) \subseteq Z(t + 1)$,

Z interpretacją ekonomiczną tych warunków można zapoznać się np. w pracach Panek (2003, rozdz. 5), Panek (2014). Zgodnie z **(G1)**, **(G4)** przestrzenie produkcyjne $Z(t)$ są stożkami domkniętymi w R^{2n} z wierzchołkami w 0. Warunek $(x,y) \neq 0$, w myśl **(G2)**, pociąga za sobą $x \neq 0$. Interesują nas wyłącznie takie nietrywialnie (niezerowe) procesy.

Niech $(x,y) \in Z(t)$, $(x,y) \neq 0$.

Liczbę

$$\alpha(x, y) = \max\{\alpha | \alpha x \leqq y\},$$

pokazującą ile razy wektor produkcji y przekracza (po wszystkich współrzędnych) wektor nakładów x, nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu (x,y). Funkcja α jest ciągła i dodatnio jednorodna stopnia 0 na $Z(t) \setminus \{0\}$ (zob. Panek, 2003, tw. 5.2). Liczbę

$$\alpha_{M,t} = \max_{\substack{(x,y) \in Z(t) \\ (x,y) \neq 0}} \alpha(x, y)$$

nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie *t*. Przy przyjętych założeniach zadanie to ma rozwiązanie[4], tj.

$$\exists\big(\bar{x}(t),\bar{y}(t)\big)\in Z(t)\left(\alpha\big(\bar{x}(t),\bar{y}(t)\big)=\max_{\substack{(x,y)\in Z(t)\\(x,y)\neq 0}}\alpha(x,y)=\alpha_{M,t}\right).$$

Ponadto

$$\alpha_{M,t+1}\geq\alpha_{M,t},\ t=0,1,\dots,t_1-1,$$

(zob. Panek, 2013, tw. 2). Proces $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ nazywamy optymalnym procesem produkcji w okresie *t*. Jest on określony z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią, gdyż dla dowolnej liczby $\lambda>0$: $\alpha(\bar{x}(t),\bar{y}(t))=\alpha(\lambda\bar{x}(t),\lambda\bar{y}(t))$.

Podobnie jak w pracy Panek (2014a) zakładamy, że wśród optymalnych procesów produkcji w każdym okresie istnieją takie, w których wytwarzane są wszystkie towary, co wobec **(G1)** oznacza, że

(G6) $\forall t\in T\ \exists\big(\bar{x}(t),\bar{y}(t)\big)\in Z(t)\big(\alpha\big(\bar{x}(t),\bar{y}(t)\big)=\alpha_{M,t}\ \wedge\ \alpha_{M,t}\bar{x}(t)=\bar{y}(t)>0\big)$

(tzw. warunek regularności gospodarki, zob. np. Gale, 1956). Mówiąc dalej o optymalnym procesie produkcji mamy na myśli proces $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ spełniający ten warunek. O wektorze $\bar{s}(t)=\frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|}$ mówimy, że charakteryzuje optymalną strukturę produkcji w niestacjonarnej gospodsarce Gale'a w okresie *t*.

Przez $p(t)=(p_1(t),\dots,p_n(t))\geq 0$ oznaczamy wektor cen towarów w gospodarce Gale'a w okresie *t*. Weźmy proces $(x,y)\in Z(t)$, $(x,y)\neq 0$. Liczbę

$$\beta(x,y,p(t))=\frac{\langle p(t),y\rangle}{\langle p(t),x\rangle}$$

(tam gdzie jest określana) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu $(x,y)\in Z(t)$ przy cenach $p(t)$.

□ **Twierdzenie 1**

W regularnej gospodarce Gale'a, spełniającej warunki **(G1)–(G6)**, $\forall\ t\in T$ istnieją ceny $\bar{p}(t)$, przy których:

$$\forall(x,y)\in Z(t)\big(\langle\bar{p}(t),y\rangle-\alpha_{M,t}\langle\bar{p},x\rangle\leq 0\big) \tag{1}$$

---

[4] Wobec dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji mamy $\max_{\substack{(x,y)\in Z(t)\\(x,y)\neq 0}}\alpha(x,y)=\max_{G(t)}\alpha(x,y)$, gdzie $G(t)=\{(x,y)\in Z(t)|\|x,y\|=1\}$. Zadanie to ma rozwiązanie, gdyż α jest funkcją ciągłą, a zbior $G(t)$ jest zwarty (tw. Weierstrassa).

oraz

$$\beta(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{p}(t)) = \max_{\substack{(x,y)\in Z(t) \\ (x,y)\neq 0}} \beta(x, y, \bar{p}(t)) = \alpha_{M,t}. \tag{2}$$

Dowód. Weźmy dowolny okres $t \in T$. Z definicji optymalnego procesu produkcji oraz warunku **(G6)** mamy $\alpha_{M,t}\bar{x}(t) = \bar{y}(t) > 0$. Zbiór

$$C(t) = \{c \in R^n | c = \alpha_{M,t}x - y, (x, y) \in Z(t)\}$$

jest stożkiem domkniętym w R^n z wierzchołkiem w 0 (jako liniowy obraz stożka $Z(t)$), który nie zawiera wektorów ujemnych. Istotnie, gdyby do $C(t)$ należał pewien wektor $c^0 = \alpha_{M,t}x^0 - y^0 < 0$, wówczas istniałaby taka liczba $\varepsilon > 0$, że $(\alpha_{M,t} + \varepsilon)x^0 \leqq y^0$, co przeczy definicji liczby $\alpha_{M,t}$. Zbiór

$$D(t) = C(t) + R^n_+ = \{d | d = c + x, c \in C(t), x \in R^n_+\}$$

jest też stożkiem domkniętym w R^n z wierzchołkiem w 0 (jako suma pary stożków domkniętych) oraz $D(t) \neq R^n$, gdyż stożek $D(t)$, podobnie jak $C(t)$, nie zawiera wektorów ujemnych. Istnieje zatem taki wektor $\bar{p}(t) \neq 0$, że

$$\forall d \in D(t)(\langle \bar{p}(t), d\rangle \geq 0).$$

Ponieważ wektory $e^i = (0,0,\ldots,1,\ldots,0)$, $i = 1,2,\ldots,n$ (z jedynką na i-tym miejscu), należą do $D(t)$, zatem $\bar{p}(t) \geq 0$ oraz

$$\forall c \in C(t)(\langle \bar{p}(t), c\rangle \geq 0),$$

czyli

$$\forall (x, y) \in Z(t)\big(\langle \bar{p}(t), \alpha_{M,t}x - y\rangle \geq 0\big),$$

tzn. zachodzi warunek (1). Stąd

$$\beta\big(x, y, \bar{p}(t)\big) = \frac{\langle \bar{p}(t), y\rangle}{\langle \bar{p}(t), x\rangle} \leq \alpha_{M,t}$$

(wszędzie gdzie $\langle \bar{p}(t), x\rangle \neq 0$). Z (1) wynika w szczególności, że

$$0 < \langle \bar{p}(t), \bar{y}(t)\rangle \leq \alpha_{M,t}\langle \bar{p}(t), \bar{x}(t)\rangle.$$

Z drugiej strony (wobec **(G6)**) mamy:

$$\langle \bar{p}(t), \bar{y}(t) \rangle = \alpha_{M,t} \langle \bar{p}(t), \bar{x}(t) \rangle > 0,$$

zatem:

$$\beta\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{p}(t)\big) = \alpha_{M,t} \geq \beta\big(x, y, \bar{p}(t)\big)$$

wszędzie gdzie funkcja β jest określona. Warunek ten jest równoważny z (2). ■

Wektor $\overline{p}(t)$ nazywamy wektorem cen von Neumanna w okresie t. O trójcy $\{\alpha_{M,t}, (\overline{x}(t), \overline{y}(t)), \overline{p}(t)\}$ mówimy, że charakteryzuje niestacjonarną gospodarkę Gale'a w chwilowej równowadze von Neumanna w okresie t. Równowaga chwilowa von Neumanna oznacza taki stan gospodarki (tj. takie nakłady, taką produkcję i takie ceny w okresie t), w którym dochodzi do zrównania ekonomicznej efektywności produkcji z jej efektywnością technologiczną na maksymalnym możliwym do osiągnięcia poziomie. Zarówno ceny von Neumanna jak i procesy produkcji w równowadze są określone z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią (z dokładnością do struktury).

W celu uproszczenia dalszych wywodów zakładamy, że optymalne procesy produkcji $\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t), t = 1,2, \ldots, t_1$, są określone jednoznacznie z dokładnością do struktury[5], a efektywność ekonomiczna jakiegokolwiek procesu produkcji w okresie t różnego od procesu optymalnego jest niższa od najwyższej efektywności możliwej do osiągnięcia przez gospodarkę w tym okresie:

$$\textbf{(G7)}\ \forall (x, y) \in Z(t) \left((x, y) \neq \big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \implies \beta\big(x, y, \bar{p}(t)\big) = \frac{\langle \bar{p}(t), y \rangle}{\langle \bar{p}(t), x \rangle} < \right.$$

$$\left. < \beta\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{p}(t)\big) = \alpha_{M,t} \right).$$

Jeżeli zachodzi ten warunek, to

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall t \in T\ \exists \delta_{\varepsilon,t} \in (0, \alpha_{M,t})\ \forall (x, y) \in Z(t)$$

$$\left(\left\| \frac{x}{\|x\|} - \bar{s}(t) \right\| \geq \varepsilon \Rightarrow \beta(x, y, \overline{p}(t)) \leq \alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t} \right). \tag{3}$$

Dowód przebiega podobnie jak dowód lematu 5.2 w pracy Panek (2003) (po podstawieniu $Z(t)$, $\alpha_{M,t}$, $\delta_{\varepsilon,t}, \bar{s}(t)$ zamiast $Z, \alpha_M, \delta_\varepsilon, \bar{s}$)[6]. O cenach $\overline{p}(t)$ zakładamy, że

[5] Warunek ten można osłabić, ale powoduje to wzrost złożoności modelu.

[6] Wystarczy zauważyć, że jeżeli $(x, y) \neq \big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big)$, to $\frac{x}{\|x\|} \neq \bar{s}(t)$; zob. także np. Takayama (1985, rozdz. 7, cz. A).

są jednostajnie ograniczone (z dołu i z góry), niezależnie od długości horyzontu $T = \{0,1,\ldots,t_1\}$:

$$\textbf{(G8)}\ \exists\ 0 < \pi_{\min} \le \pi_{\max} < +\infty \quad \forall\ t_1 > 0\ \forall\ t \in \{0,1,\ldots,t_1\}\left(\pi_{\min} \le \|\bar{p}(t)\| \le \pi_{\max}\right).$$

Gospodarka Gale'a jest zamknięta w tym znaczeniu, że nakłady w okresie następnym pochodzą w niej z produkcji wytworzonej w okresie poprzednim: $x(t+1) \leqq y(t)$, co w świetle **(G3)** prowadzi do warunku:

$$(y(t), y(t+1)) \in Z(t+1),\ t = 0,1,\ldots,t_1 - 1. \tag{4}$$

Zakładamy, że dany jest początkowy wektor produkcji

$$y(0) = y^0 > 0. \tag{5}$$

O ciągu wektorów produkcji $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniającym warunki (4)–(5) mówimy, że opisuje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu. Ciąg $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będący rozwiązaniem następującego zadania maksymalizacji wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna) w końcowym okresie t_1 horyzontu T:

$$\begin{array}{l} \max\langle \bar{p}(t_1), y(t_1)\rangle \\ \text{p.w. (4)–(5)} \\ (\text{wektor } y^0 > 0 \text{ ustalony}) \end{array} \tag{6}$$

nazywamy $(y^0, \bar{p}(t_1))$ – optymalnym procesem wzrostu (w niestacjonarnej gospodarce Gale'a). Przy przyjętych założeniach zadanie to ma rozwiązanie[7].

W okresie $t = 0$ warunek **(G6)** zapewnia istnienie optymalnego procesu $(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) \in Z(0)$, w którym $\bar{y}(0) > 0$. W konsekwencji, w następnym okresie $t = 1$ warunki **(G1)**, **(G6)** zapewniają istnienie optymalnego procesu $(\bar{x}(1), \bar{y}(1)) \in Z(1)$, w którym $\bar{y}(1) > 0$ oraz $\bar{x}(1) \leqq \bar{y}(0)$. Rozumując podobnie dalej, dla $t = 2,\ldots,t_1$ otrzymujemy (określony z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią) i rozpoczynający się w $\bar{y}(0) > 0$ ciąg optymalnych procesów produkcji $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t)$ w którym:

$$\bar{x}(t+1) \leqq \bar{y}(t), t = 0,1,\ldots t_1. \tag{7}$$

W artykule Panek (2014a) przyjęto silniejsze założenie, że istnieje co najmniej jeden taki ciąg optymalnych procesów $\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, w którym nakłady w okresie następnym są dodatnie i równe produkcji pochodzącej z okresu poprzedniego:

$$\bar{x}(t+1) = \bar{y}(t) > 0, t = 0,1,\ldots t_1 - 1, \tag{7'}$$

[7] Zob. Panek (2003, lemat 5.1 oraz tw. 5.7), Panek (2014, s. 9).

oraz że produkcja w okresie t jest wielokrotnością nakładów, z których została wytworzona:

$$\bar{y}(t) = \alpha_{M,t}\bar{x}(t)\,,\ t = 0,1, \dots t_1.$$

Ciąg optymalnych procesów produkcji spełniających te dwa warunki generuje $(\bar{y}(0), t_1)$ – dopuszczalny proces $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, w którym

$$\bar{y}(t+1) = \alpha_{M,t}\bar{y}(t) > 0\,,\ t = 0,1,\dots,t_1 - 1 \tag{7''}$$

i wobec tego

$$\forall t \in T\left(\frac{\bar{y}(t)}{\left\|\bar{y}(t)\right\|} = \bar{s} = const. > 0\right).$$

W procesie takim:

– produkcja rośnie z okresu na okres w maksymalnym tempie $\alpha_{M,t}$
– struktura produkcji nie zmienia się w czasie.

W literaturze półprostą

$$N = \{\lambda\bar{s} |\ \lambda > 0\}$$

leżącą w przestrzeni stanów gospodarki (wektorów produkcji) i spełniającą te dwa warunki przyjęto nazywać magistralą (produkcyjną).[8]

Każdy $(\bar{y}(0), t_1)$ dopuszczalny proces postaci (7''), w którym gospodarka osiąga największe tempo wzrostu, „leży" na magistrali, można ją więc równoważnie utożsamiać z następującą wiązką wszystkich $(\bar{y}(0, t_1))$ – dopuszczalnych procesów wzrostu:

$$N^S(0,t_1) = \left\{\left\{\bar{y}(t)\right\}_{t=0}^{t_1} \mid (\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)) \in Z(t+1) \wedge \alpha_{M,t+1}\bar{y}(t) = \bar{y}(t+1) > 0,\ t = 0,1,\dots,t_1 - 1\right\}$$

w przestrzeni $(t_1 + 1)$ elementowych ciągów wektorów produkcji. Równoważność magistral N i $N^S(0,t_1)$ rozumiemy w tym sensie, że:

$$\bar{y} \in N \Leftrightarrow \exists \left\{\bar{y}(t)\right\}_{t=0}^{t_1} \in N^S(0,t_1)\ \ (\bar{y}(0) = \bar{y}).$$

Oczywiście,

$$\forall\ \bar{y} \in N\ \forall\ \left\{\bar{y}(t)\right\}_{t=0}^{t_1} \in N^S(0,t_1)\ \ \forall t \in T\left(\frac{\bar{y}}{\left\|\bar{y}\right\|} = \frac{\bar{y}(t)}{\left\|\bar{y}(t)\right\|} = \bar{s} = const. > 0\right).$$

[8] Równoważnie – promieniem von Neumanna, zob. np. Takayama (1985, rozdz. 7).

Przejście od magistrali N w przestrzeni stanów do jej odpowiednika $N^S(0,t_1)$ w przestrzeni procesów (ciągów) umożliwia zdefiniowanie zakrzywionej magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. W tym celu utwórzmy ciąg optymalnych procesów produkcji $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t), t = 1,2, \ldots, t_1$, spełniający warunek:

$$\bar{x}(t) = \lambda_{max,t}\bar{s}(t), \tag{8}$$

gdzie

$$\lambda_{max,t} = \max\{\lambda |\ \lambda\bar{s}(t) \leqq \bar{y}(t-1)\},\ \bar{s}(t) = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|},\ t = 1,2, \ldots, t_1.$$

Przy założeniach (**G1**)–(**G6**) ciąg takich optymalnych procesów istnieje, a wektory produkcji $\bar{y}(0), \bar{y}(1), \ldots, \bar{y}(t_1)$ tworzą $(\bar{y}(0), t_1)$ dopuszczalny proces wzrostu, w którym:

$$0 < \alpha_{t+1} = \alpha(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)) \leq \alpha_{M,t+1},\ \ t = 0,1, \ldots, t_1 - 1, \tag{9}$$

Zbiór (wiązkę) $N^Z(0,t_1)$ wszystkich takich $(\bar{y}(0), t_1)$ – dopuszczalnych procesów wzrostu nazywamy zakrzywioną magistralą produkcyjną w niestacjonarnej gospodarce Gale'a:

$$N^z(0,t_1) = \Big\{\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1} \mid \forall t \in T\ \exists(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t)\ \big(\bar{y}(t) = \alpha_{M,t}\bar{x}(t)\big) \text{ oraz dla } t = 1,2,\ldots,t_1 \text{ zachodzi warunek (8)}\Big\}. \tag{10}$$

Jeżeli przez $N^Z(t_0)$ oznaczymy przekrój wiązki $N^Z(0,t_1)$ w okresie $t_0 \in T$,

$$N^z(t_0) = \{\bar{y} |\ \bar{y} = \bar{y}(t_0) \text{ dla pewnego procesu } \{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1} \in N^z(0,t_1)\},$$

to:

$$\forall\lambda > 0(\bar{y} \in N^z(t_0) \Rightarrow \lambda\bar{y} \in N^z(t_0)).$$

Wobec **(G7)** zakrzywiona magistrala jest określona jednoznacznie z dokładnością do struktury:

$$\forall t \in T\left(\bar{y}^1(t), \bar{y}^2(t) \in N^z(t) \Rightarrow \frac{\bar{y}^1(t)}{\|\bar{y}^1(t)\|} = \frac{\bar{y}^2(t)}{\|\bar{y}^2(t)\|} = \bar{s}(t)\right).$$

Jeżeli $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1} \in N^z(0,t_1)$ to $\forall\lambda > 0$ także $\{\lambda\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1} \in N^z(0,t_1)$ oraz dla $t = 0,1,\ldots,t_1 - 1$:

$$\alpha(\lambda\bar{y}(t), \lambda\bar{y}(t+1)) = \alpha(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)) = \alpha_{t+1} \leq \alpha_{M,t+1}. \tag{11}$$

Zgodnie z (11) gospodarka Gale'a na zakrzywionej magistrali rozwija się w maksymalnym możliwym do osiągnięcia tempie $\alpha_{t+1} = \alpha\big(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)\big) \leq \alpha_{M,t+1}$, $t = 0,1,\ldots,t_1 - 1$ (a niekoniecznie w tempie $\alpha_{t+1} = \alpha_{M,t+1}$, jak w (7'')), ale może obecnie zmieniać strukturę produkcji $\bar{s}(t)$.[9] Tempo wzrostu oraz struktura produkcji na zakrzywionej magistrali zależą w naszej gospodarce od zmian zachodzących w technologii (od dynamiki przestrzeni produkcyjnych $Z(t)$). W warunkach gwałtownie zmieniającej się technologii zarówno tempo wzrostu produkcji na zakrzywionej magistrali α_t jak i optymalna technologiczna efektywność $\alpha_{M,t}$ mogą nie tylko podlegać znacznym wahaniom z okresu na okres, ale także istotnie różnić się między sobą. W gospodarce Gale'a o ich regularnym przebiegu decyduje równomierny rozwój technologii.

Przyjmijmy oznaczenie: $\gamma(t_1) = \prod_{t=1}^{t_1} \frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_t}$. Zakładamy, że rozwój technologii produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale'a odbywa się harmonijnie, a wskaźniki α_t oraz $\alpha_{M,t}$ spełniają warunek:

(G9) Ciąg $\{\gamma(t_1)\}_{t_1=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

Przy tym założeniu wielkości α_t oraz $\alpha_{M,t}$ nie rozbiegają się nieograniczenie. Ciąg $\{\gamma(t_1)\}_{t_1=1}^{\infty}$ jest bowiem monotonicznie rosnący ($\gamma(t_1 + 1) \geq \gamma(t_1)$) i wobec tego, że jest ograniczony, ma granicę:

$$\exists M < +\infty \left(\lim_{t_1} \gamma(t_1) = \prod_{t=1}^{\infty} \frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_t} = M\right) \tag{12}$$

$(M \geq 1)$.

W celu wykluczenia takiej nierealistycznej sytuacji, kiedy efektywność ekonomiczna procesu produkcji mogłaby zbliżać się do optymalnej, mimo że jego struktura stale odbiegałaby o pewną wielkość $\varepsilon > 0$ od struktury optymalnej zakładamy, że

(G10) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_\varepsilon > 0 \quad \forall t_1 > 0 \quad \forall t \in T \quad \left(\frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} \geq \nu_\varepsilon \right)$.

Wobec tego, że $\delta_{\varepsilon,t} \in (0, \alpha_{M,t})$, otrzymujemy $\nu_\varepsilon < 1$.

3. „SŁABE" TWIERDZENIE O ZAKRZYWIONEJ MAGISTRALI

W ekonomii matematycznej znane są co najmniej trzy rodzaje twierdzeń o magistrali. W „słabych" twierdzeniach dowodzi się, że optymalne procesy wzrostu w prawie wszystkich okresach ustalonego horyzontu przebiegają w bliskim otoczeniu magistral (w sensie odległości kątowej). „Silne" twierdzenia precyzują czas, w którym możliwe jest „wytrącenie" optymalnego procesu z otoczenia magistrali: może to nastąpić

[9] Stąd nazwa „zakrzywiona" magistrala. Tym też gospodarka Gale'a omawiana obecnie różni się od wcześniej prezentowanych w artykułach Panek (2013, 2014a,b).

tylko w początkowej i/lub końcowej fazie wzrostu. Im dłuższy jest horyzont T, tym dłużej (i tym bliżej) w jego środkowym okresie optymalne procesy wzrostu przebiegają w otoczeniu magistrali. W „bardzo silnych" twierdzeniach o magistrali jest mowa o optymalnych procesach, które w pewnym okresie docierają do magistrali. Zdecydowaną większość wyników uzyskano dotąd na gruncie wielosektorowych stacjonarnych (najczęściej liniowych) modeli dynamiki ekonomicznej typu Neumanna–Gale'a–Leontiefa. Znacznie krótsza jest lista prac poświęconych efektom zakrzywionej magistrali w modelach niestacjonarnych, zob. np. Gantz (1980), Joshi (1997), Keeler (1972), Makarow, Rubinow (1973, rozdz. 4).

Poniżej prezentujemy „słabą" wersję twierdzenia o zakrzywionej magistrali w niestacjonarnym modelu Gale'a.

□ **Twierdzenie 2** („Słabe" twierdzenie o zakrzywionej magistrali)

Jeżeli gospodarka Gale'a spełnia warunki **(G1)–(G10)**, to $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε, że liczba okresów czasu, w których $(y^0, \bar{p}(t_1))$ optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek

$$\left\| \frac{y^*(t)}{\left\| y^*(t) \right\|} - \bar{s}(t) \right\| \geq \varepsilon \tag{13}$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T.

Dowód.[10] Początkowy wektor produkcji y^0 oraz wektor $\bar{s}(0)$ struktury produkcji na zakrzywionej magistrali $N^z(0,t_1)$ są dodatnie, zatem istnieje taka liczba $\sigma > 0$, że $y^0 > \sigma\, \bar{s}(0) > 0$. Zgodnie z definicją zakrzywionej magistrali istniejen $(\bar{y}(0), t_1)$ dopuszczalny proces $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, w którym $\bar{y}(0) = \sigma \bar{s}(0) > 0$ oraz

$$\alpha_{t+1} \bar{y}(t) \leqq \bar{y}(t+1) \tag{14}$$

dla $t = 0,1,\ldots,t_1 - 1$. Ponieważ $(\bar{y}(0), \bar{y}(1) \in Z(1))$, więc (zgodnie z (G3)) $(y^0, \bar{y}(1)) \in Z(1)$ skąd otrzymujemy (y^0, t_1) dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$,

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^0 & dla \quad t = 0, \\ \bar{y}(t) & dla \quad t = 1,\ldots,t_1. \end{cases} \tag{15}$$

Z (14) wynika, że

$$\tilde{y}(t_1) \geqq \sigma\left(\prod_{t=1}^{t_1} \alpha_t\right) \bar{s}(0).$$

[10] Dowód częściowo wzorowany na dowodzie twierdzenia 1 w pracy Panek (2014a).

Stąd i z definicji $(y^0, \overline{p}(t_1))$ optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ dostajemy następujące dolne ograniczenie wartości produkcji w optymalnym procesie w okresie t_1:

$$\langle \overline{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \geq \langle \overline{p}(t_1), \overline{y}(t_1)\rangle = \sigma\left(\prod_{t=1}^{t_1} \alpha_t\right)\langle \overline{p}(t_1), \overline{s}(0)\rangle > 0. \tag{16}$$

Z drugiej strony, w myśl (1),

$$\langle \overline{p}(t+1), y^*(t+1)\rangle \leq \alpha_{M,t+1}\langle \overline{p}(t+1), y^*(t)\rangle,\ t = 0,1,\ldots,t_1 - 1.$$

Wówczas, dla $t = t_1 - 1$ mamy:

$$0 < \langle \overline{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \leq \alpha_{M,t_1}\langle \overline{p}(t_1), y^*(t_1 - 1)\rangle.$$

Ceny von Neumanna są określone z dokładnością do struktury, więc istnieje taki wektor $\overline{p}(t_1 - 1)$, że

$$\langle \overline{p}(t_1), y^*(t_1 - 1)\rangle \leq \langle \overline{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 1)\rangle,$$

co prowadzi do nierówności:

$$\langle \overline{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \leq \alpha_{M,t_1}\langle \overline{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 1)\rangle \leq \alpha_{M,t_1}\alpha_{M,t_1-1}\langle \overline{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 2)\rangle.$$

Podobnie, istnieją takie ceny $\overline{p}(t_1 - 2)$, że:

$$\langle \overline{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 2)\rangle \leq \langle \overline{p}(t_1 - 2), y^*(t_1 - 2)\rangle,$$

skąd otrzymujemy:

$$\langle \overline{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \leq \alpha_{M,t_1}\alpha_{M,t_1-1}\langle \overline{p}(t_1 - 2), y^*(t_1 - 2)\rangle.$$

Postępując tak dalej dochodzimy ostatecznie do następującego górnego ograniczenia wartości produkcji w optymalnym procesie w końcowym okresie t_1:

$$\langle \overline{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \leq \left(\prod_{t=1}^{t_1} \alpha_{M,t}\right)\langle \overline{p}(0), y^0\rangle. \tag{17}$$

Jeżeli w okresach $\tau_1,\ldots,\tau_k < t_1$ zachodzi warunek (13), to

$$\beta(y^*(t),\ y^*(t+1)\rangle, \overline{p}(t+1)) \leq \alpha_{M,t+1} - \delta_{\varepsilon,t+1},\ t = \tau_1,\ldots,\tau_k$$

a wówczas, zważywszy na (17), dostajemy nierówność:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \le \left(\prod_{\substack{t=1 \\ t\notin L_\varepsilon}}^{t_1} \alpha_{M,t}\right)\left[\prod_{t\in L_\varepsilon}(\alpha_{M,t}-\delta_{\varepsilon,t})\right]\langle \bar{p}(0), y^0\rangle, \tag{18}$$

gdzie $L_\varepsilon = \{\tau_1,\dots,\tau_k\}$. Z (16), (18) po przekształceniach i uwzględnieniu **(G8)**, **(G9)**, (12) dochodzimy do warunku:

$$M\prod_{t=\tau_1}^{\tau_k}\left(\frac{\alpha_{M,t}-\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_t}\right) \ge \prod_{t=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_t}\right)\prod_{t=\tau_1}^{\tau_k}\left(\frac{\alpha_{M,t}-\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_t}\right) \ge \prod_{\substack{t=1\\ t\notin L_\varepsilon}}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_t}\right)\prod_{t=\tau_1}^{\tau_k}\left(\frac{\alpha_{M,t}-\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_t}\right) \ge$$

$$\ge \frac{\sigma\langle \bar{p}(t_1), \bar{s}(0)\rangle}{\langle \bar{p}(0), y^0\rangle} \ge \frac{\sigma\pi_{\min}\bar{s}_{\min}(0)}{\pi_{\max} y^0_{\max}} > 0,$$

czyli

$$\prod_{t=\tau_1}^{\tau_k}\left(\frac{\alpha_{M,t}-\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_t}\right) \ge \frac{\sigma\pi_{\min}\bar{s}_{\min}(0)}{M\pi_{\max} y^0_{\max}} = C^1 > 0, \tag{19}$$

gdzie $\bar{s}_{min}(0) = \min_i \bar{s}_i(0) > 0$, $y^0_{\max} = \max_i y^0_i > 0$.

Z **(G10)** wynika, że

$$\frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_t}(1-\nu_\varepsilon) \ge \frac{\alpha_{M,t}-\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_t}, \tag{20}$$

Z (19), (20), zważywszy na (12) dostajemy:

$$M(1-\nu_\varepsilon)^k \ge C^1,$$

co pozwala na oszacowanie liczby k:

$$k \le \frac{\ln C^2}{\ln(1-\nu_\varepsilon)} = A, \tag{21}$$

gdzie $C^2 = \frac{C^1}{M} > 0$ (liczba A jest dodatnia, gdyż $C^2 \in (0,1)$). Do zakończenia dowodu wystarczy w charakterze liczby k_ε przyjąć najmniejszą liczbę całkowitą większą od A. ■

4. UOGÓLNIENIE TWIERDZENIA 2

Niech $u(\cdot\,;t_1)\colon R^n_+ \to R^1_+$ będzie funkcją użyteczności określoną na wektorach produkcji w końcowym okresie t_1 horyzontu T. Zakładamy, że

(G11) (i) $\forall\, t_1 > 0\ \big(u(\cdot\,;t_1) \in C^0(R^n_+)\big)$,

(ii) $\forall\, t_1 > 0$ funkcja $u(\cdot\,;t_1)$ jest wklęsła, rosnąca i dodatnio jednorodna stopnia 1,

(iii) $\forall\, y > 0 \;\; u(y;\cdot)$ jest taką malejącą funkcją czasu, że

$$\exists \delta_y > 0 \left(\inf_{t_1} u(y;t_1) \geq \delta_y\right),$$

(iv) $\exists\, a > 0 \; \forall\, t_1 > 0 \; \forall\, y \geq 0 \; (u(y,t_1) \leq a \, \langle \bar{p}(t_1), y\rangle)$.

Warunki **(i)**–**(iii)** są standardowe. Warunek **(iv)** mówi, że funkcję użyteczności $u(\cdot\,;t_1)$ można aproksymować (z góry) formą liniową z wektorem tworzącym $a\,\bar{p}(t_1)$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią[11].

Niech $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będzie rozwiązaniem zadania

$$\begin{gathered} \max\; u(y(t_1);t_1) \\ \text{p.w. (4)–(5)} \\ (\text{wektor } y^0 > 0 \text{ ustalony}) \end{gathered} \tag{6'}$$

maksymalizacji użyteczności produkcji w końcowym okresie t_1 horyzontu T. Przy przyjętych założeniach zadanie to, podobnie jak zadanie (6), ma rozwiązanie. Będziemy je nazywać $\left(y^0, u(\cdot\,;t_1)\right)$ – optymalnym procesem wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Zastępując warunek **(G8)** słabszym warunkiem

(G8') $\exists\; \pi_{\max} < +\infty \quad \forall\; t_1 > 0 \; \forall\; t \in \{0,1,\dots,t_1\} \left(\left\|\bar{p}(t)\right\| \leq \pi_{\max}\right)$

dochodzimy do następującego twierdzenia.

□ **Twierdzenie 3**

Jeżeli gospodarka Gale'a spełnia warunki **(G1)–(G6), (G8'), (G9)–(G11)**, to $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε, niezależna od długości horyzontu $T = \{0,1,\dots,t_1\}$, że liczba okresów czasu, w których $\left(y^0, u(\cdot\,;t_1)\right)$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek (13), nie przekracza k_ε.

Dowód w znacznej części jest powtórzeniem dowodu twierdzenia 2. Niech $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będzie procesem optymalnym, a $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ procesem (y^0,t_1) – dopuszczalnym postaci (12). Wówczas, zważywszy na **(G11)** dostajemy:

$$\begin{aligned} a\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle &\geq u(y^*(t_1);t_1) \geq u(\tilde{y}(t_1);t_1) = \\ = u\Big(\sigma\big(\textstyle\prod_{t=1}^{t_1}\alpha_t\big)\bar{s}(0)\,;t_1\Big) &= \sigma\big(\textstyle\prod_{t=1}^{t_1}\alpha_t\big)u(\bar{s}(0);t_1) > 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Załóżmy, że w okresach $\tau_1,\dots,\tau_k < t_1$ zachodzi warunek (13). Wtedy, postępując jak przy dowodzie twierdzenia 2 dochodzimy do nierówności (18). Łącząc (18), (22) oraz uwzględniając **(G8'), (G11),** (20), po przekształceniach dochodzimy do nierówności:

11 Zob. Takayama (1985), ibid.

$$M(1-\nu_\varepsilon)^k \ \geq \frac{\sigma u(\bar{s}(0);t_1)}{a\langle \bar{p}(0), y^0 \rangle} \geq \frac{\sigma \delta_{\bar{s}(0)}}{a\pi_{max} y^0_{max}} = C^1 > 0,$$

z której ponownie otrzymujemy warunek (21). Jeżeli $C^2 = \frac{C^1}{M} \in (0,1)$, wtedy

$$k \leq \frac{\ln C^2}{\ln(1-\nu_\varepsilon)} = A > 0$$

i podobnie jak w twierdzeniu 2 w charakterze liczby k_ε można przyjąć najmniejszą liczbę całkowitą większą od A. Jeżeli $C^2 \geq 1$, wtedy $k_\varepsilon = 0$. ■

LITERATURA

Gale D., (1956), The Closed Linear Model of Production, w: Kuhn H. W., Tucker A. W. (red.), *Linear Inegualitics and Related Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, 285–303.

Gantz D. T., (1980), A Strong Turnpike Theorem for a Nonstationary von Neumann-Gale Production Model, *Econometrica*, 48 (7), 1777-90.

Joshi S., (1997), Turnpike Theorems in Nonconvex, Nonstationary Environments, International Economic *Review*, 38 (1), 225–248.

Keeler E. B., (1972), A Twisted Turnpike, International Economic Review, 13 (1), 160–166.

Khan M. A., Piazza A., (2011), An Overview of Turnpike Theory: Towards the Discounted Deterministic Case, *Advances in Mathematical Economics*, 14, 39–67.

Khan M. A., Piazza A., (2012), Turnpike Theory: A Current Perspective, w: Durlauf S. N., Blume L. E., (red.), *The New Palgrave Dictionary of Economics*, Online Edition, Palgrave Macmillan, 6, 1–13.

Makarow W. L., Rubinow A. M., (1973), *Matiematiczieskaja Tieoria Ekonomiczieskoj Dinamiki i Rawnowiesija*, Nauka, Moskwa.

Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AE w Poznaniu.

Panek E., (2011), O pewnej prostej wersji „słabego" twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, *Przegląd Statystyczny*, 58 (1–2), 75–87.

Panek E., (2013), "Słaby" i "bardzo silny" efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 60 (3), 291–303.

Panek E., (2014a), Niestacjonarna gospodarka Gale'a z rosnącą efektywnością produkcji na magistrali, Przegląd Statystyczny, 61 (1), 5–15.

Panek E., (2014b), O pewnej wersji twierdzenia o magistrali w gospodarce Gale'a ze zmienną technologią, Przegląd Statystyczny, 61 (2), 105–114.

Takayama A., (1985), *Mathematical Economics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

ZAKRZYWIONA MAGISTRALA W NIESTACJONARNEJ GOSPODARCE GALE'A. CZĘŚĆ I

S t r e s z c z e n i e

W nawiązaniu do prac Panek (2013, 2014a) w artykule udowodniono tzw. „słabe" twierdzenie o zakrzywionej magistrali, na której gospodarka osiąga maksymalne tempo wzrostu. Obrazem geometrycznym takiej magistrali jest krzywa w przestrzeni stanów gospodarki – odpowiednik promienia von Neumanna w stacjonarnym modelu Neumanna-Gale'a.

Słowa kluczowe: niestacjonarna gospodarka Gale'a, równowaga von Neumanna, zakrzywiona magistrala, „słabe" twierdzenie o magistrali

TWISTED TURNPIKE IN THE NON-STATIONARY GALE ECONOMY. PART I

A b s t r a c t

In the reference to papers Panek (2013, 2014a) we present the so called "weak" version of the twisted turnpike in the non-stationary Gale economy. A geometrical representation of such twisted turnpike is a curve in the state-space, which is a counterpart of von Neumann ray in a stationary Gale economy.

Keywords: non-stationary Gale economy, von Neumann equilibrium, twisted turnpike, "weak" turnpike theorem