PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXII – ZESZYT 4 – 2015

EMIL PANEK[1]

ZAKRZYWIONA MAGISTRALA W NIESTACJONARNEJ GOSPODARCE GALE'A. CZĘŚĆ II

1. WSTĘP

Obrazem geometrycznym zakrzywionej magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a przedstawionej w pracy Panek (2015) jest zbiór (wiązka) krzywych, na których gospodarka osiąga maksymalne tempo wzrostu zmieniając strukturę produkcji. W stacjonarnej gospodarce Gale'a[2] odpowiednikiem zakrzywionej magistrali jest półprosta w przestrzeni stanów, zwana magistralą produkcyjną (promieniem von Neumanna), na której gospodarka osiąga maksymalne tempo wzrostu zachowując jednak stałą strukturę produkcji. Nawiązując do prac Panek (2014, 2015) dowodzimy, że jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale'a funkcjonującej w horyzoncie $T = \{0, 1, \ldots, t_1\}$ optymalny proces wzrostu w pewnym okresie $\hat{t} < t_1$ dociera do zakrzywionej magistrali oraz ceny w gospodarce nie zmieniają się zbyt gwałtownie, to niezależnie od długości horyzontu (niezależnie od t_1) proces taki w kolejnych okresach $t = \hat{t}+1,\ldots,t_1 - 1$ (za wyjątkiem ewentualnie ostatniego okresu t_1) przebiega w dowolnie bliskim otoczeniu zakrzywionej magistrali. Obowiązują oznaczenia stosowane w pracy Panek (2015).

2. MODEL

Model będący przedmiotem naszego zainteresowania został szczegółowo przedstawiony w pracy Panek (2015), dlatego tutaj ograniczamy się do jego bardzo zwięzłej prezentacji. Zakładamy, że czas biegnie skokowo, a zmienna czasu t przyjmuje wartości ze zbioru $T = \{0, 1, \ldots, t_1\}$, który nazywamy horyzontem gospodarki; $0 < t_1 < +\infty$. W gospodarce mamy n towarów (zużywanych i/lub wytwarzanych). Przez $x = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ oznaczamy wektor towarów zużywanych w gospodarce w okresie t, przez $y(t) = (y(t), y(t), \ldots, y_n(t))$ wektor towarów wytwarzanych w tym okresie. Jeżeli z wektora towarów $x(t)$ można wytworzyć wektor towarów $y(t)$,

[1] Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Katedra Ekonomii Matematycznej, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, Polska, e-mail: emil.panek@ue.poznan.pl.

[2] Oraz w niektórych niestacjonarnych gospodarkach Gale'a szczególnej postaci. Przykład takiej gospodarki przedstawiono m.in. w artykule Panek (2014).

to mówimy, że para $(x(t), y(t))$ opisuje technologicznie dopuszczalny proces produkcji w okresie t; $x(t)$ nazywamy wówczas wektorem nakładów (zużycia), a $y(t)$ wektorem wyników (produkcji). Przez $Z(t) \subset R^{2n}_{+}$ oznaczamy zbiór wszystkich technologicznie dopuszczalnych procesów produkcji w gospodarce w okresie t. Zapis $(x,y) \in Z(t)$ (lub $(x(t),y(t)) \in Z(t)$) oznacza, że w okresie t z nakładów x w gospodarce można wytworzyć produkcję y. Przestrzenie produkcyjne spełniają następujące warunki[3]:

(G1) $\forall\,(x^1, y^1) \in Z(t)\ \ \forall (x^2, y^2) \in Z(t)\ \ \forall \alpha, \beta \geq 0\ \big((\alpha x^1 + \beta x^2, \alpha y^1 + \beta y^2) \in Z(t)\big)$.

(G2) $\forall (x, y) \in Z(t)\ (x = 0 \Longrightarrow y = 0)$.

(G3) $\forall (x, y) \in Z(t)\ \forall\, x' \geqq x\ \forall\, 0 \leqq y' \leqq y\ \big((x', y') \in Z(t)\big)$.

(G4) Zbiory $Z(t)$ są domknięte w R^{2n}_{+}.

(G5) $Z(t) \subseteq Z(t+1)$, $t = 0,1,\dots,t_1 - 1$.

Tak zdefiniowane przestrzenie produkcyjne są stożkami wypukłymi, domkniętymi w R^{2n}_{+}, z wierzchołkami w 0. Interesują nas nietrywialne procesy $(x,y) \neq 0$. Jeżeli $0 \neq (x,y) \in Z(t)$, to $x \neq 0$.

Niech $0 \neq (x,y) \in Z(t)$. Liczbę

$$\alpha(x, y) = \max\{\alpha \mid \alpha x \leqq y\}$$

nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu (x,y). Funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła i dodatnio jednorodna stopnia 0 na $Z(t) \setminus \{0\}$, Panek (2003, tw. 5.2). Liczbę

$$\alpha_{M,t} = \max_{\substack{(x,y)\in Z(t)\\ (x,y)\neq 0}} \alpha(x, y) \tag{1}$$

nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie t. Przy przyjętych założeniach zadanie (1) ma dla każdego $t \in T$ rozwiązanie oraz $\alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t}$, $t = 0,1,\dots,t_1 - 1$, Panek (2013, tw. 2). Zakładamy, że

(G6) $\forall t \in T\ \ \exists \big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t)\ \big(\alpha\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) = \alpha_{M,t}\ \wedge\ \alpha_{M,t}\bar{x}(t) = \bar{y}(t) > 0\big)$

[3] Zob. Panek (2015). Z interpretacją ekonomiczną tych warunków można zapoznać się w pracy Panek (2003, rozdz. 5); zob. także np. Makarow, Rubinow (1973), Nikaido (1968, rozdz. 4), Takayama (1985, rozdz. 7).

(tzw. warunek regularności gospodarki mówiący, że w każdym okresie $t \in T$ istnieją optymalne procesy produkcji, w których wytwarzane są wszystkie towary). Mówiąc dalej o optymalnych procesach produkcji mamy na myśli procesy spełniające ten warunek. Przez $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)) \geq 0$ oznaczamy wektor cen towarów w gospodarce w okresie t. Liczbę

$$\beta(x, y, p(t)) = \frac{\langle p(t), y \rangle}{\langle p(t), x \rangle}$$

(tam gdzie jest określona) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu $(x, y) \in Z(t)$ przy cenach $p(t)$.[4] W gospodarce Gale'a spełniającej warunki **(G1)–(G6)** $\forall t \in T$ istnieją ceny $\bar{p}(t)$, przy których:

$$\forall (x, y) \in Z(t) \big(\langle \bar{p}(t), y \rangle - \alpha_{M,t} \langle \bar{p}, x \rangle \leq 0 \big) \tag{2}$$

oraz

$$\beta(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{p}(t)) = \max_{\substack{(x,y) \in Z(t) \\ (x,y) \neq 0}} \beta(x, y, \bar{p}(t)) = \alpha_{M,t} \tag{3}$$

(Panek, 2015, tw. 1). Wektor $\bar{p}(t)$ nazywamy wektorem cen von Neumanna w okresie t, a o trójce $\{\alpha_{M,t}, (\bar{x}(t), \bar{y}(t)), \bar{p}(t)\}$ mówimy, że charakteryzuje niestacjonarną gospodarkę Gale'a w chwilowej równowadze von Neumanna w okresie t[5]. Zarówno ceny von Neumanna, jak i proces produkcji w równowadze chwilowej są określone z dokładnością do struktury (mnożenia przez stałą dodatnią). Interesuje nas gospodarka, w której optymalne procesy produkcji $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t)$, $t = 0, 1, \ldots, t_1$, są określone jednoznacznie (z dokładnością do struktury), a efektywność ekonomiczna $\beta(x, y, \bar{p}(t))$ dowolnego procesu $0 \neq (x, y) \in Z(t)$ różnego od optymalnego (spoza stanu chwilowej równowagi von Neumanna) jest niższa od $\alpha_{M,t}$:

(G7) $\forall (x, y) \in Z(t)$

$$\left((x, y) \neq (\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}(t)) = \frac{\langle \bar{p}(t), y \rangle}{\langle \bar{p}(t), x \rangle} << \beta(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{p}(t)) = \alpha_{M,t} \right).$$

Można pokazać, że wówczas:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall t \in T \, \exists \delta_{\varepsilon,t} \in (0, \alpha_{M,t}) \forall (x, y) \in Z(t) \left(\left\| \frac{x}{\|x\|} - \bar{s}(t) \right\| \geq \varepsilon \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}(t)) \leq \alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t} \right), \tag{4}$$

---

[4] Symbolem $\langle a,b \rangle$ oznaczamy iloczyn skalarny wektorów $a, b \in R^n$: $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

[5] W równowadze chwilowej von Neumanna dochodzi do zrównania ekonomicznej efektywności produkcji z efektywnością technologiczną ma maksymalnym poziomie możliwym do osiągnięcia przez gospodarkę w tym okresie.

gdzie $\bar{s}(t) = \frac{\bar{x}(t)}{\|\bar{x}(t)\|} = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|}$, $\|x\| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ (Panek, 2003, lemat 5.2) oraz (Panek, 2015, przypis 3).

Gospodarka jest zamknięta w tym znaczeniu, że nakłady $x(t+1)$ w okresie następnym mogą pochodzić w niej wyłącznie z produkcji $y(t)$ wytworzonej w roku poprzednim, $x(t+1) \leqq y(t)$, co wobec **(G3)** prowadzi do warunku:

$$(y(t), y(t+1)) \in Z(t+1),\ t = 0,1,\dots,t_1 - 1. \tag{5}$$

Ustalmy początkowy wektor produkcji

$$y(0) = y^0 > 0. \tag{6}$$

Każdy ciąg wektorów $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniający warunki (5)–(6) nazywamy (y^0, t_1) – dopuszczalnym procesem wzrostu (lub trajektorią produkcji) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a.

Jeżeli spełnione są warunki **(G1)–(G6)**, to istnieje ciąg optymalnych procesów produkcji $\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) \in Z(t)$, $t = 0, 1, \dots, t_1$, w którym dla $t = 1, 2, \dots, t_1$

$$\bar{x}(t) = \lambda_{max,t}\bar{s}(t), \tag{7}$$

gdzie

$$\lambda_{max,t} = \max\{\lambda |\ \lambda\bar{s}(t) \leqq \bar{y}(t-1)\},\ \bar{s}(t) = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|}. \tag{8}$$

Ponieważ $\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) \in Z(t)$ oraz

$$\bar{x}(t+1) \leqq \bar{y}(t),\ t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

więc ciąg wektorów produkcji $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ tworzy $(\bar{y}(0), t_1)$ dopuszczalny proces wzrostu[6]. W procesie tym

$$0 < \alpha_{t+1} = \alpha\left(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)\right) \leq \alpha_{M,t+1},\quad t = 0,1,\dots,t_1 - 1,$$

Zbiór (wiązkę) wszystkich takich $(\bar{y}(0), t_1)$ dopuszczalnych procesów wzrostu $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, że

$$\forall t \in T\ \exists \bar{x}(t) > 0\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) \in Z(t)\left(\bar{y}(t) = \alpha_{M,t}\bar{x}(t)\right)$$

[6] Nie należy $(\bar{y}^0, t_1)$ – dopuszczalnego procesu $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ mylić z (y^0, t_1) dopuszczalnym procesem $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Nawet gdy $y^0 = \bar{y}(0)$ (czego nie można wykluczyć a priori), wtedy ciąg $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest wprawdzie jednocześnie procesem (y^0, t_1) – dopuszczalnym, ale nie na odwrót (nie każdy $(\bar{y}(0), t_1)$ – dopuszczalny proces wzrostu musi bowiem spełniać warunki (7)–(8)).

oraz dla $t = 1, 2, \dots, t_1$ zachodzą warunki (7), (8), oznaczamy symbolem $N^z(0, t_1)$ i nazywamy zakrzywioną magistralą w niestacjonarnej gospodarce Gale'a.

Na zakrzywionej magistrali $\alpha_{t+1}\, \bar{y}\,(t) \leqq \bar{y}\,(t+1)$, $t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$. Jeżeli $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1} \in N^z(0, t_1)$ to $\forall \lambda > 0$ także $\{\lambda\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1} \in N^z(0, t_1)$ (procesy wzrostu na zakrzywionej magistrali są określone z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią). Niech $N^z(t_0)$ będzie przekrojem wiązki $N^z(0, t_1)$ w okresie $t_0 \in T$:

$$N^z(t_0) = \{\bar{y}\ |\bar{y} = \bar{y}(t_0) \text{ dla pewnego procesu } \{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1} \in N^z(0, t_1)\}.$$

Wówczas:

$$\forall \lambda > 0\big(\bar{y} \in N^z(t_0) \Rightarrow \lambda\bar{y} \in N^z(t_0)\big).$$

Zakrzywiona magistrala jest określona jednoznacznie (z dokładnością do struktury):

$$\forall t \in T \left(\bar{y}^1(t), \bar{y}^2(t) \in N^z(t) \Rightarrow \frac{\bar{y}^1(t)}{\|\bar{y}^1(t)\|} = \frac{\bar{y}^2(t)}{\|\bar{y}^2(t)\|} = \bar{s}(t)\right).$$

Zakładamy, że w interesującej nas gospodarce technologia produkcji nie zmienia się gwałtownie a to oznacza m.in. łagodne zmiany w czasie wskaźników α_t, $\alpha_{M,t}$. W szczególności, przyjmując oznaczenie $\gamma(t_1) = \prod_{t=1}^{t_1} \frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_t}$ zakładamy, że:

(G8) Ciąg $\gamma(t_1)_{t_1=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

Warunek ten zapewnia, że z czasem wartości wskaźników α_t, $\alpha_{M,t}$ nie tylko nie oddalają się nieograniczenie, ale przy $t_1 \longrightarrow +\infty$ zbliżają się do siebie.

Przyjmijmy oznaczenie: $\sigma(t) = \frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_t}$. Jeżeli zachodzi warunek **(G8)**, to

Fakt 1

$$\exists\, M < +\infty \left(\lim_{t_1} \gamma(t_1) = M\right), \tag{9}$$

Fakt 2

$$\lim_t \sigma(t) = 1 \tag{10}$$

Dowód faktu 1. Ciąg $\{\gamma(t_1)\}_{t_1=1}^{\infty}$ jest niemalejący, $\gamma(t_1 + 1) \geq \gamma(t_1) \geq 1$, czyli (wobec **(G8)**) ma skończoną granicę M ≥ 1.

Dowód faktu 2. Zgodnie z faktem 1: $\forall t \left(\sigma(t) = \frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_t} \in [1, M]\right)$ Załóżmy, że istnieje taka liczba $\bar{\sigma} > 1$ oraz taki podciąg $\{\sigma(\tau_k)\}_{k=1}^{\infty}$, iż $\forall k(\sigma(\tau_k) \geq \bar{\sigma})$. Wtedy $\lim_{t_1} \gamma(t_1) = +\infty$, wbrew (9).

Ostatni warunek, **(G9)**, wyklucza mało realistyczną sytuację, gdy efektywność ekonomiczna procesu zbliża się do maksymalnej, mimo że jego struktura stale odbiega od optymalnej o pewną ustaloną wielkość.

$$\textbf{(G9)}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_\varepsilon > 0 \quad \forall t_1 > 0 \quad \forall t \in T \quad \left(\frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} \geq \nu_\varepsilon \right),$$

gdzie $\delta_{\varepsilon,t}$ jest liczbą z przedziału $(0, \alpha_{M,t})$ spełniającą warunek (4). Ponieważ $\delta_{\varepsilon,t} \in (0, \alpha_{M,t})$, więc $\nu_\varepsilon \in (0,1)$.

3. OPTYMALNY PROCES WZROSTU. EFEKT ZAKRZYWIONEJ MAGISTRALI

Weźmy wektor $\bar{p}(t_1)$ cen von Neumanna i rozpatrzmy następujące zadanie maksymalizacji wartości produkcji w ostatnim okresie t_1 horyzontu *T*:

$$\begin{aligned} &\max \langle \bar{p}(t_1), y(t_1) \rangle \\ &\text{p.w. (5)–(6)} \\ &(\text{wektor } y^0 > 0 \text{ ustalony}) \end{aligned} \tag{11}$$

Rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ tego zadania nazywamy $(y^0, \bar{p}(t_1))$ – optymalnym procesem wzrostu (optymalną trajektorią produkcji) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Przy przyjętych założeniach zadanie to ma rozwiązanie[7].

□ **Twierdzenie 1**

Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Jeżeli niestacjonarna gospodarka Gale'a spełnia warunki **(G1)–(G9)**, wówczas istnieje taka liczba naturalna $\tilde{t}$, że gdy $(y^0, \bar{p}(t_1))$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie $\check{t} \geq \tilde{t}$ $(\check{t} < t_1)$ dociera do zakrzywionej magistrali,

$$y^*(\check{t}) \in N^z(\check{t}),$$

oraz

$$\frac{\max_{t\in\{\check{t}+1,\dots,t_1\}} \langle \bar{p}(t_1), \bar{s}(\hat{t}) \rangle}{\min_{t\in\{\check{t}+1,\dots,t_1\}} \langle \bar{p}(\hat{t}), \bar{s}(\hat{t}) \rangle} < \frac{1}{2M(1-\nu_\varepsilon)} \tag{12}$$

to

[7] Z dowodem można zapoznać się np. w pracy Panek (2003, lemat 5.1 oraz tw. 5.7). Zarówno lemat jak i twierdzenie zachowują moc po przejściu od stałej w czasie technologii *Z* do zmiennych przestrzeni $Z(t)$ spełniających warunki **(G1)–(G6)**.

$$\forall t \in \{\check{t}+1, \dots, t_1 - 1\} \, (\|s^*(t) - \bar{s}(t)\| < \varepsilon),$$[8]

gdzie: $s^*(t) = \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|}, \bar{s}(t) = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|}$.

Dowód[9]. Weźmy taki horyzont $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$, żeby począwszy od pewnego okresu $\tilde{t} < t_1$ $(\tilde{t} > 0)$ spełniony był warunek:

$$\frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_t} \leq 2, \ t = \tilde{t}, \tilde{t}+1, \dots, t_1, \tag{13}$$

gdzie $\alpha_{M,t} = \alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$, $\alpha_t = \alpha(\bar{y}(t-1), \bar{y}(t))$, $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t)$ jest optymalnym procesem produkcji w okresie t, $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1} \in N^z(0, t_1)$ jest $(\bar{y}(0), t_1)$ – dopuszczalnym procesem wzrostu na zakrzywionej magistrali. Zgodnie z (10) warunek ten zachodzi gdy tylko horyzont T jest dostatecznie długi. Z założenia $(y^0, \bar{p}(t_1))$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w okresie $\check{t} < t_1$ $(\check{t} \geq \tilde{t})$ prowadzi do zakrzywionej magistrali, $y^*(\check{t}) \in N^z(\check{t})$, zatem istnieje taki $(\bar{y}(0), t_1)$ – dopuszczalny proces wzrostu z dodatnim początkowym wektorem $\bar{y}(0) \in N^z(0)$, że $y^*(\check{t}) = \bar{y}(\check{t})$. Utwórzmy następujący ciąg wektorów produkcji $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), \ t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \bar{y}(t), \ t = \check{t}+1, \dots, t_1, \end{cases} \tag{14}$$

otrzymany ze „sklejenia" początkowego segmentu $(y^0, \bar{p}(t_1))$ – optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ z końcową częścią $(\bar{y}(0), t_1)$ dopuszczalnego procesu $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1} \in N^z(0, t_1)$. Ciąg ten tworzy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu, w którym w okresie $t = \check{t}$:

$$\tilde{y}(\check{t}) = \sigma \bar{s}(\check{t}) > 0,$$

gdzie $\sigma = \|\bar{y}(\check{t})\|$; $\bar{s}(\check{t})$ jest wektorem struktury produkcji na zakrzywionej magistrali w okresie $\check{t}$, $\bar{s}(\check{t}) = \frac{\bar{y}(\check{t})}{\|\bar{y}(\check{t})\|}$.

Zgodnie z konstrukcją zakrzywionej magistrali mamy $\alpha_{t+1} \, \bar{y}\,(t) \leqq \bar{y}\,(t+1)$ dla $t = 1, 2, \dots, t_1 - 1$. Stąd:

$$\tilde{y}(t_1) \geqq \left(\prod_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_t\right) \bar{y}(\check{t}) = \left(\prod_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_t\right) \sigma \bar{s}(\check{t}) > 0.$$

Z definicji optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ otrzymujemy następujące (dolne) ograniczenie wartości produkcji w takim procesie w końcowym okresie t_1 horyzontu T:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}(t_1), \tilde{y}(t_1) \rangle \geq \sigma\left(\prod_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_t\right) \langle \bar{p}(t_1), \bar{s}(\check{t}) \rangle > 0. \tag{15}$$

---

[8] Struktura produkcji $s^*(t)$ w procesie optymalnym różni się „dowolnie mało" (o mniej niż ε) od struktury produkcji $\bar{s}(t)$ na zakrzywionej magistrali. Warunek (12) oznacza, że w okresach $\check{t}+1, \dots, t_1$ ceny nie zmieniają się zbyt gwałtownie.

[9] Dowód częściowo wzorowany na dowodzie twierdzenia o magistrali w pracy Panek (2014).

Z (2), (3), (5) wynika, że w okresach $t = 1, 2, \dots, t_1 - 1$ optymalny proces wzrostu spełnia warunek:

$$\langle \bar{p}(t+1), y^*(t+1) \rangle \le \alpha_{M,t+1} \langle \bar{p}(t+1), y^*(t) \rangle.$$

W okresie $t = t_1$ mamy:

$$0 < \langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \le \alpha_{M,t_1} \langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1 - 1) \rangle.$$

Ponieważ ceny von Neumanna są określone z dokładnością do struktury, zatem istnieje taki wektor cen $\bar{p}(t_1 - 1)$, że

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1 - 1) \rangle \le \langle \bar{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 1) \rangle,$$

co prowadzi do nierówności:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \le \alpha_{M,t_1} \langle \bar{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 1) \rangle \le \alpha_{M,t_1} \alpha_{M,t_1 - 1} \langle \bar{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 2) \rangle.$$

Postępując tak dalej (dla $t = t_1 - 1, \dots, \check{t} + 1$) otrzymujemy:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \le \left(\prod_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_{M,t} \right) \langle \bar{p}(\check{t}), y^*(\check{t}) \rangle. \tag{16}$$

Załóżmy, że

$$\exists \tau \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1 - 1\} \left(\left\| \frac{y^*(\tau)}{\|y^*(\tau)\|} - \bar{s}(\tau) \right\| \ge \varepsilon \right).$$

Wówczas, zgodnie z (4):

$$\beta\big(y^*(\tau), y^*(\tau+1), \bar{p}(\tau+1)\big) \le \alpha_{M,\tau+1} - \delta_{\varepsilon,\tau+1},$$

lub inaczej:

$$\langle \bar{p}(\tau+1), y^*(\tau+1) \rangle \le (\alpha_{M,\tau+1} - \delta_{\varepsilon,\tau+1}) \langle \bar{p}(\tau+1), y^*(\tau) \rangle. \tag{17}$$

Łącząc (13), (16), (17) dostajemy górne ograniczenie wartości produkcji w procesie optymalnym w okresie t_1:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1) \rangle \le \sigma \left(\prod_{\substack{t=\check{t}+1 \\ t \ne \tau+1}}^{t_1} \alpha_{M,t} \right) \big(\alpha_{M,t+1} - \delta_{\varepsilon,\tau+1}\big) \langle \bar{p}(\check{t}), \bar{s}(\check{t}) \rangle. \tag{18}$$

Z (15), (18), uwzględniając (9), (12), po przekształceniach dostajemy warunek:

$$M\frac{\alpha_{M,\tau+1}-\delta_{\varepsilon,\tau+1}}{\alpha_{\tau+1}} \geq \left(\prod_{\substack{t=\check{t}+1\\ t\neq\tau+1}}^{t_1}\frac{\alpha_{M,t}}{\alpha_t}\right)\frac{\alpha_{M,\tau+1}-\delta_{\varepsilon,\tau+1}}{\alpha_{\tau+1}} \geq \frac{\langle\bar{p}(t_1),\bar{s}(\check{t})\rangle}{\langle\bar{p}(\check{t}),\bar{s}(\check{t})\rangle} \geq$$

$$\geq \frac{\min\limits_{t\in\{\hat{t}+1,\dots,t_1\}}\langle\bar{p}(\check{t}),\bar{s}(\check{t})\rangle}{\max\limits_{t\in\{\hat{t}+1,\dots,t_1\}}\langle\bar{p}(t_1),\bar{s}(\check{t})\rangle} > 2M(1-\nu_\varepsilon) > 0,$$

czyli:

$$\frac{\alpha_{M,\tau+1}-\delta_{\varepsilon,\tau+1}}{\alpha_{\tau+1}} > 2(1-\nu_\varepsilon). \tag{19}$$

Wobec tego, że $\forall t \in T\left(1-\nu_\varepsilon \geq 1-\frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}}\right)$ (zgodnie z **(G9)**) oraz $\tau \geq \check{t}+1 \geq \tilde{t}+1$, z (13), (19) dostajemy:

$$2(1-\nu_\varepsilon) \geq \frac{\alpha_{M,\tau+1}}{\alpha_{\tau+1}}(1-\nu_\varepsilon) \geq \frac{\alpha_{M,\tau+1}}{\alpha_{\tau+1}}\left(1-\frac{\delta_{\varepsilon,\tau+1}}{\alpha_{M,\tau+1}}\right) = \frac{\alpha_{M,\tau+1}-\delta_{\varepsilon,\tau+1}}{\alpha_{\tau+1}} > 2(1-\nu_\varepsilon).$$

Otrzymana sprzeczność zamyka dowód.

■

Zastępując warunek (12) warunkiem

$$\frac{\max_{t\in\{\tilde{t}+1,\dots,t_1\}}\langle\bar{p}(t_1),\bar{s}(\hat{t})\rangle}{\min_{t\in\{\hat{\tilde{t}}+1,\dots,t_1\}}\langle\bar{p}(\hat{t}),\bar{s}(\hat{t})\rangle} < \frac{1}{M^2(1-\nu_\varepsilon)} \tag{12'}$$

otrzymujemy następującą wersję twierdzenia o zakrzywionej magistrali.

□ **Twierdzenie 2**

Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale'a spełniającej warunki **(G1)**–**(G9)** (y^0, t_1) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ dociera do zakrzywionej magistrali,

$$y^*(\check{t}) \in N^z(\check{t}),$$

a ceny von Neumanna spełniają warunek (12'), to

$$\forall t \in \{\check{t}+1,\dots,t_1-1\}\ (\|s^*(t)-\bar{s}(t)\| < \varepsilon).$$

Dowód. Powtarzając dowód twierdzenia 1 dochodzimy do warunku (18). Warunek (19) przyjmuje obecnie postać następującą:

$$\frac{\alpha_{M,\tau+1}-\delta_{\varepsilon,\tau+1}}{\alpha_{\tau+1}} > M(1-\nu_\varepsilon).$$

Z drugiej strony, wobec **(G9)** oraz tego, że $M \geq \frac{\alpha_{M,\tau+1}}{\alpha_{\tau+1}}$, mamy:

$$M(1-\nu_\varepsilon) \geq \frac{\alpha_{M,\tau+1}-\delta_{\varepsilon,\tau+1}}{\alpha_{\tau+1}}.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

■

4. UWAGI KOŃCOWE

W teorii magistral znane są trzy rodzaje twierdzeń mówiących o swoistej (magistralnej) stabilności optymalnych procesów wzrostu w gospodarkach typu Neumanna-Gale'a-Leontiefa[10]. „Słabe" twierdzenia głoszą, że optymalne procesy wzrostu w prawie wszystkich okresach ustalonego horyzontu czasu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ przebiegają w bliskim otoczeniu magistrali (w sensie odległości kątowej). „Silne" twierdzenia precyzują czas, kiedy może nastąpić wytrącenie optymalnego procesu z otoczenia magistrali i konstatują, że zdarzenia takie mogą zaistnieć tylko w początkowych i końcowych okresach horyzontu T. W obu typach twierdzeń liczba takich okresów jest ograniczona i niezależna od długości horyzontu. W „bardzo silnych" twierdzeniach mowa o procesach, które „prawie zawsze" leżą na magistrali. Do tej grupy należą w szczególności twierdzenia precyzujące warunki, w których wejście na magistralę jest „prawie bezpowrotne" (gospodarka dochodząca do magistrali w okresie $\check{t} < t_1$ pozostaje na niej we wszystkich kolejnych okresach $t = \check{t}+1, \dots, t_1 - 1$ (za wyjątkiem być może ostatniego okresu t_1), znowu niezależnie od długości horyzontu T.

Udowodnione twierdzenia 1, 2 stanowią swoiste ogniwo pośrednie między ich wersją „silną" i „bardzo silną".[11] Wartością dodaną pracy jest dowód, że stabilność magistralna optymalnych procesów wzrostu jest także atrybutem niestacjonarnej gospodarki Gale'a z zakrzywioną magistralą.

---

[10] Por. np. bibliografię w: Khan, Piazza (2011a, 2011b, 2012), McKenzie (2005), Panek (2011). Zdecydowana większość prac poświęcona jest „efektowi magistrali" w stacjonarnych gospodarkach ze stałą (niezmienną w czasie) technologią. Do nielicznych należą publikacje zawierające dowody twierdzeń o magistrali w gospodarkach niestacjonarnych, zob. np. Gantz (1980), Joshi (1997), Keeler (1972), Panek (2015).

[11] Podobne twierdzenie – o własnościach optymalnych procesów wzrostu w gospodarce Gale'a ze stałą strukturą produkcji na magistrali – przedstawiono w pracy Panek (2014).

LITERATURA

Gantz D. T., (1980), A Strong Turnpike Theorem for a Nonstationary von Neumann-Gale Production Model, *Econometrica*, 48 (7), 1777-90.

Keeler E. B., (1972), A Twisted Turnpike, *International Economic Review*, 13 (1), 160–166.

Khan M. A., Piazza A., (2011a), An Overview of Turnpike Theory: Towards the Discounted Deterministic Case, Advances in Mathematical Economics, 14, 39–67.

Khan M. A., Piazza, A., (2011b), Classical Turnpike Theory and the Economics of Forestry, *Journal of Behavioral Economics and Organization*, 79, 194–201.

Khan M. A., Piazza A., (2012), Turnpike Theory: A Current Perspective, w: Durlauf S. N., Blume L. E., (red.), *The New Palgrave Dictionary of Economics*, Online Ed., Palgrave Macmillan, 6, 1–13.

Makarow W. L., Rubinow A. M., (1973), *Matiematiczeskaja Tieoria Ekonomiczeskoj Dinamiki i Rawnowiesija*, Nauka, Moskwa.

Nikaido H., (1968), *Convex Structures and Economic Theory*, Acad. Press, New York and London.

Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AEP, Poznań.

Panek E., (2011), O pewnej wersji „słabego" twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, *Przegląd Statystyczny*, 58 (1-2), 75–87.

Panek E., (2013), „Słaby" i „bardzo silny" efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 60 (3), 291–303.

Panek E., (2014), O pewnej wersji twierdzenia o magistrali w gospodarce Gale'a ze zmienną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 61 (2), 105–114.

Panek E., (2015), Zakrzywiona magistrala w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Cz. I, *Przegląd Statystyczny*, 62 (2), 149–163.

Takayama A., (1985), *Mathematical Economics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

ZAKRZYWIONA MAGISTRALA W NIESTACJONARNEJ GOSPODARCE GALE'A. CZĘŚĆ II

S t r e s z c z e n i e

Nawiązując do artykułów Panek (2014, 2015), w pracy udowodniono dwie wersje twierdzenia o tzw. zakrzywionej magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Pokazano, że jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale'a optymalny proces wzrostu w pewnym okresie czasu dociera do zakrzywionej magistrali oraz ceny von Neumanna nie zmieniają się gwałtownie, wtedy niezależnie od długości horyzontu funkcjonowania gospodarki proces taki pozostaje blisko magistrali przez wszystkie kolejne okresy, za wyjątkiem być może ostatniego.

Słowa kluczowe: niestacjonarna gospodarka Gale'a, ceny von Neumanna, zakrzywiona magistrala

TWISTED TURNPIKE IN THE NON-STATIONARY GALE ECONOMY. PART II

A b s t r a c t

In the reference to articles Panek (2014, 2015) in the paper two version of the so called twisted turnpike in the nonstationary Gale economy are presented. There states that if in the non-stationary Gale economy the optimal growth process in the certain period of the time reaches the twisted turnpike and the von Neumann prices do not change to abruptly, than irrespectively of the length of the horizon of the economy such a process for all next periods can be found in the turnpike's proximity, except for perhaps the final time.

Keywords: non-stationary Gale economy, von Neumann prices, twisted turnpike